Álgebra I
Examen II

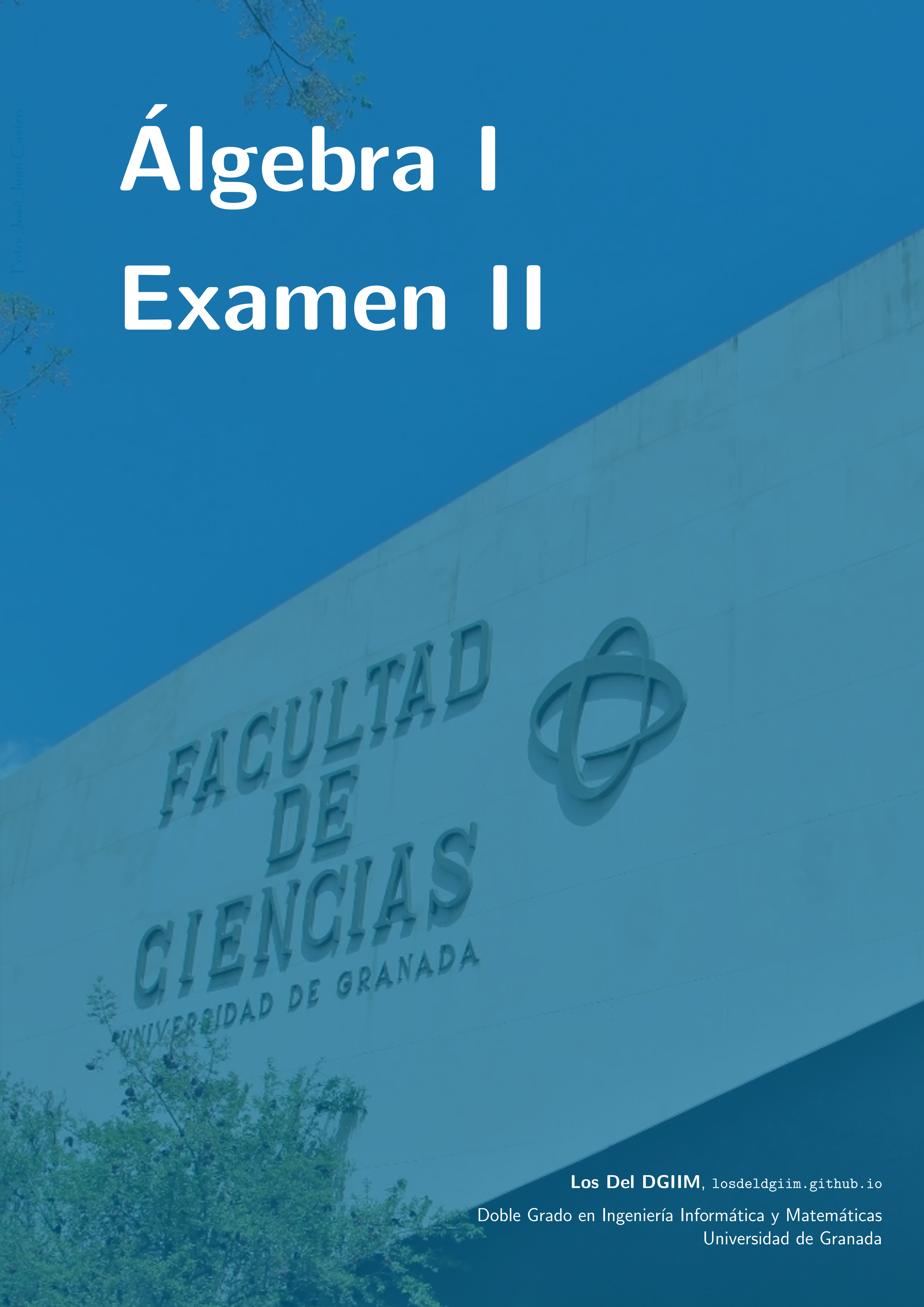

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra I
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Álgebra I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Pilar Carrasco Carrasco.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 14 de enero de 2022.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. Verdadero o falso:

- Sea A un DE con $\phi : A\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ su función euclídea. Sean $a, b \in A$ elementos no nulos tales que $a \mid b$ y $b \nmid a$. Entonces: $\phi(a) < \phi(b)$.
- El anillo $\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{60}$ tiene 48 unidades.
- En $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, los elementos $\sqrt{2}$ y $4 + 3\sqrt{2}$ son unidades.
- Sea A un anillo conmutativo, entonces $U(A) = U(A[x])$.
- Sea $\alpha = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ con $a, b \neq 0$. Entonces, α es irreducible si, y sólo si a^2+b^2 es primo en $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 2. Encuentre un polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ de grado 8 tal que:
$f(x) \equiv x + 2 \mod (3x^2 + 4x + 3)$ y $f(x) \equiv 5x^2 + 2x + 3 \mod (2x^2 + 3)$.

Ejercicio 3.

- Factoriza en $\mathbb{Z}[i]$ el elemento $\alpha = 31 + 12i$.
- Estudie si es o no irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $f(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

Ejercicio 4. En el anillo $\mathbb{Z}_2[x]$, sea $f(x) = x^3 + 1$ e $I = f(x)\mathbb{Z}_2[x]$, el ideal principal generado por $f(x)$. Describa el anillo cociente $\mathbb{Z}_2/I$, listando todos sus elementos y calculando el inverso de aquellos que lo tengan.

Ejercicio 1. Verdadero o falso:

- Sea A un DE con $\phi : A\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ su función euclídea. Sean $a, b \in A$ elementos no nulos tales que $a \mid b$ y $b \nmid a$. Entonces: $\phi(a) < \phi(b)$.

  Verdadero:
  Como $a \mid b \Rightarrow \exists k \in A$ tal que $b = ka \Rightarrow \phi(b) = \phi(ka) \geqslant \phi(a)$.
  Supongamos que $\phi(a) = \phi(b)$:
  Dividimos a entre b, $\exists q, r \in A$ tales que:

  $$a = bq + r \quad \wedge \quad \begin{cases} \text{r} = 0 \\ \vee \\ \phi(r) < \phi(b) \end{cases}$$

  Como $b \nmid a \Rightarrow r \neq 0 \Rightarrow \phi(r) < \phi(b) \Rightarrow \phi(r) < \phi(a)$

  $$r = a - bq = a - kaq = a(1 - kq) \Rightarrow \phi(r) = \phi(a(1 - kq)) \geqslant \phi(a) = \phi(b)$$

  Pero también tenemos que $\phi(r) < \phi(b)$. <u>Contradicción</u>, luego $\phi(a) \neq \phi(b)$.

  En definitiva, $\phi(a) < \phi(b)$.

- El anillo $\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{60}$ tiene 48 unidades.

  Falso:

  $$|U(\mathbb{Z}_{120})| = \varphi(120) = \varphi(2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 32$$
  $$|U(\mathbb{Z}_{60})| = \varphi(60) = \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 16$$

  Sea $(a, b) \in U(\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{60}) \Rightarrow \exists (c, d) \in (\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{60})$ tales que:

  $$(a, b)(c, d) = 1 = (1, 1) \Rightarrow (ac, bd) = (1, 1) \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{ac} = 1 \ \text{ en } \ \text{Z}_{120} & \Rightarrow & \text{a,c} \in U(\mathbb{Z}_{120}) \\ \wedge & & \\ \text{bd} = 1 \ \text{ en } \ \text{Z}_{60} & \Rightarrow & \text{b,d} \in U(\mathbb{Z}_{60}) \end{array} \right\} \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow U(\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{60}) = \left\{ \text{(a,b)} \ \middle| \ \begin{array}{r} \text{a} \in U(\mathbb{Z}_{120}) \\ \\ \text{b} \in U(\mathbb{Z}_{60}) \end{array} \right\}$$

  Luego:

  $$|U(\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{60})| = |U(\mathbb{Z}_{120})||U(\mathbb{Z}_{60})| = \varphi(120)\varphi(60) = 32 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^9 = 512$$

- En $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, los elementos $\sqrt{2}$ y $4 + 3\sqrt{2}$ son unidades.

  Falso:
  Sean $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = 4 + 3\sqrt{2}$:

  $$N(\sqrt{2}) = -2 \neq \pm 1 \Rightarrow \alpha \notin U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$$
  $$N(4 + 3\sqrt{2}) = 16 - 2 \cdot 9 = -2 \neq \pm 1 \Rightarrow \beta \notin U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$$

- Sea A un anillo conmutativo, entonces $U(A) = U(A[x])$.

  Falso:
  Sea $A = \mathbb{Z}_4$ un anillo conmutativo:
  Por ser $A \subseteq A[x]$, es claro que $U(A) \subseteq U(A[x])$.
  Sea $f = 2x + 1 \in \mathbb{Z}_4[x]$:

  $$f^2 = (2x+1)^2 = (4x^2 + 4x + 1) = 1$$

  Luego $f^{-1} = f \Rightarrow f \in U(A[x])$. Pero $f \notin A \Rightarrow f \notin U(A)$.
  Por tanto, $U(\mathbb{Z}_4[x]) \nsubseteq U(\mathbb{Z}_4) \Rightarrow U(\mathbb{Z}_4[x]) \neq U(\mathbb{Z}_4)$.

- Sea $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ con $a, b \neq 0$. Entonces, α es irreducible si, y sólo si $a^2 + b^2$ es primo en $\mathbb{Z}$.

  Verdadero:
  $\Rightarrow$) Supongamos que α es irreducible:
  Como $\mathbb{Z}[i]$ es un DFU, primo equivale a irreducible, luego:
  $N(\alpha) \in \{\pm p, \pm p^2\}$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo.
  Por ser $N(\alpha) = a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow N(\alpha) \in \{p, p^2\}$, con p primo en $\mathbb{Z}$.

  Supongamos que $N(\alpha) = p^2$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo:

  $$N(\alpha) = p^2 \Rightarrow \alpha \sim p \Rightarrow \exists u \in U(\mathbb{Z}[i]) \mid p = \alpha u$$
  $$U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\} \Rightarrow p \in \{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$$

  Sin embargo, como $\alpha = a + bi$ con $a, b \neq 0 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$, <u>contradicción</u>.
  Luego $N(\alpha) = p$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo.

  $\Leftarrow$) Supongamos que $N(\alpha) = p \in \mathbb{Z}$ primo:
  Supongamos que α es reducible $\Rightarrow \exists \gamma, \beta \notin U(\mathbb{Z}[i]) \mid \alpha = \beta\gamma$.

  $$p = N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}(\beta) \mid p \\ \wedge \\ \mathrm{N}(\gamma) \mid p \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}(\beta) = \pm 1 \\ \vee \\ \mathrm{N}(\gamma) = \pm 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta \in U(\mathbb{Z}[i]) \\ \vee \\ \gamma \in U(\mathbb{Z}[i]) \end{array} \right. \qquad \underline{\text{Contradicción}}$$

  Luego α es irreducible.

Ejercicio 2. Encuentre un polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ de grado 8 tal que:
$f(x) \equiv x + 2 \mod (3x^2 + 4x + 3)$ y $f(x) \equiv 5x^2 + 2x + 3 \mod (2x^2 + 3)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f} \equiv x + 2 \mod (3x^2 + 4x + 3) \\ \mathrm{f} \equiv 5x^2 + 2x + 3 \mod (2x^2 + 3) \end{array} \right.$$

De la primera congruencia:

$$f = x + 2 + g \cdot (3x^2 + 4x + 3) \text{ con } g \in \mathbb{Z}_7[x]$$

De la segunda:

$$f = x + 2 + g \cdot (3x^2 + 4x + 3) \equiv 5x^2 + 2x + 3 \quad \text{mód } (2x^2 + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot (3x^2 + 4x + 3) \equiv 5x^2 + x + 1 \quad \text{mód } (2x^2 + 3)$$

Calculamos $\text{mcd}(3x^2 + 4x + 3, 2x^2 + 3)$:

$$\begin{array}{cccl} 3x^2 & +4x & +3 & \multicolumn{1}{|l}{2x^2+3} \\ \cline{4-4} -10x^2 & & -15 & 5 \\ \cline{1-3} & 4x & +2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccl} 2x^2 & & +3 & \multicolumn{1}{|l}{4x+2} \\ \cline{4-4} -16x^2 & -8x & & 4x+5 \\ \cline{1-3} & 6x & +3 & \\ & -20x & -10 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

Luego $\text{mcd}(3x^2 + 4x + 3, 2x^2 + 3) = 4x + 2$

$$\begin{array}{cccl} 5x^2 & +x & +1 & \multicolumn{1}{|l}{4x+2} \\ \cline{4-4} -12x^2 & -6x & & 3x+4 \\ \cline{1-3} & 2x & +1 & \\ & -16x & -8 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

$$4x + 2 \mid 5x^2 + x + 1 \Rightarrow \text{ el sistema tiene solución}$$

$$\begin{array}{cccl} 3x^2 & +4x & +3 & \multicolumn{1}{|l}{4x+2} \\ \cline{4-4} -24x^2 & -12x & & 6x+5 \\ \cline{1-3} & 6x & +3 & \\ & -20x & -10 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

$$g \cdot (3x^2 + 4x + 3) \equiv 5x^2 + x + 1 \quad \text{mód } (2x^2 + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot (6x + 5) \equiv 3x + 4 \quad \text{mód } (4x + 5)$$

Calculamos $\text{mcd}(6x + 5, 4x + 5)$:

$$\begin{array}{rr|l} 6x & +5 & 4x+5 \\ \cline{3-3} -20x & -25 & \quad 5 \\ \hline & 1 & \end{array}$$

r_i	u_i	v_i
6x+5	1	0
4x+5	0	1
1	1	-5

$$\operatorname{mcd}(6x+5, 4x+5) = 1 = (6x+5) + (-5)(4x+5)$$

$5(4x+5) = (6x+5)-1 \Rightarrow 6x+5 \equiv 1 \mod (4x+5) \Rightarrow (3x+4)(6x+5) \equiv 3x+4 \mod (4x+5)$

Luego $g_0 = 3x+4$ es una solución particular del sistema.

$$\begin{array}{rr|l} 3x & +4 & 4x+5 \\ \cline{3-3} -24x & -30 & \quad 6 \\ \hline & 2 & \end{array}$$

$g_0' = 2$ es la solución óptima del sistema.

Luego las soluciones son:

$$g = 2 + (4x+5)h \mid h \in \mathbb{Z}_7[x]$$

Buscamos ahora un polinomio f de grado 8 que sea solución del sistema.
Como $f = x+2+g\cdot(3x^2+4x+3)$, sea $h \in \mathbb{Z}_7[x]$:

$$x+2+[2+(4x+5)h](3x^2+4x+3) = x+2+6x^2+x+6+(4x+5)(3x^2+4x+3)h =$$

$$= 6x^2+2x+1+(4x+5)(3x^2+4x+3)h$$

Como $\operatorname{grd}(f) = 8 \Rightarrow \operatorname{grd}[(4x+5)(3x^2+4x+3)h] = 8$

$$\operatorname{grd}(4x+5) + \operatorname{grd}(3x^2+4x+3) + \operatorname{grd}(h) = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+\operatorname{grd}(h) = 8 \Rightarrow \operatorname{grd}(h) = 5$$

$h_0 = x^5$ es una solución particular:

$$f_0 = 6x^2+2x+1+(4x+5)(3x^2+4x+3)x^5 = 6x^2+2x+1+(4x^6+5x^5)(3x^2+4x+3) =$$

$$= 5x^8+3x^7+4x^6+x^5+6x^2+2x+1 \text{ es una solución particular.}$$

En general, sirve cualquier:

$$f = 6x^2+2x+1+(4x+5)(3x^2+4x+3)h \mid h \in \mathbb{Z}_7[x] \wedge \operatorname{grd}(h) = 5$$

Ejercicio 3.

- Factoriza en $\mathbb{Z}[i]$ el elemento $\alpha = 31 + 12i$.

$$N(\alpha) = 31^2 + 12^2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$$

Busco irreducibles en $\mathbb{Z}[i]$ cuya norma sea 5. Sea $\beta = a + bi$:

$$N(\beta) = 5 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{a} = \pm 2 & \wedge & \text{b} = \pm 1 \\ \vee & & \\ \text{a} = \pm 1 & \wedge & \text{b} = \pm 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{2+i} & \text{y asociados} \\ \text{1+2i} & \text{y asociados} \end{array} \right.$$

Como sus normas son 5, primo, son irreducibles.

Divido α entre $2 + i$:

$$\frac{31 + 12i}{2 + i} = \frac{(31 + 12i)(2 - i)}{5} = \frac{62 - 31i + 24i + 12}{5} = \frac{74 - 7i}{5} \notin \mathbb{Z}[i]$$

Luego $2 + i \nmid \alpha$.

Divido α entre $1 + 2i$:

$$\frac{31 + 12i}{1 + 2i} = \frac{(31 + 12i)(1 - 2i)}{5} = \frac{31 + 12i - 62i + 24}{5} = \frac{55 - 50i}{5} = 11 - 10i$$

Luego $\alpha = (1 + 2i)\beta$ con $\beta = 11 - 10i$.

Factorizo ahora β:

$$N(\beta) = 11^2 + 10^2 = 13 \cdot 17$$

Busco irreducibles en $\mathbb{Z}[i]$ cuya norma sea 13. Sea $\gamma = a + bi$:

$$N(\gamma) = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{a} = \pm 2 & \wedge & \text{b} = \pm 3 \\ \vee & & \\ \text{a} = \pm 3 & \wedge & \text{b} = \pm 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{2+3i} & \text{y asociados} \\ \text{3+2i} & \text{y asociados} \end{array} \right.$$

Como sus normas son 13, primo, son irreducibles.

Divido β entre $3 + 2i$:

$$\frac{11 - 10i}{3 + 2i} = \frac{(11 - 10i)(3 - 2i)}{13} = \frac{33 - 30i - 22i - 20}{13} = 1 - 4i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = (1 + 2i)(3 + 2i)\gamma \text{ con } \gamma = 1 - 4i \in \mathbb{Z}[i]$$

Como $N(\gamma) = 1^2 + 4^2 = 17$, con 17 primo, γ es irreducible.

$$\alpha = (1 + 2i)(3 + 2i)(1 - 4i)$$

Como las normas de los tres factores son distintas, no son asociados.

- Estudie si es o no irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $f(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.
  Error de enunciado, el ejercicio no puede resolverse (reducir módulo 2 o 3 no aporta ninguna información).

Ejercicio 4. En el anillo $\mathbb{Z}_2[x]$, sea $f(x) = x^3 + 1$ e $I = f(x)\mathbb{Z}_2[x]$, el ideal principal generado por $f(x)$. Describa el anillo cociente $\mathbb{Z}_2/I$, listando todos sus elementos y calculando el inverso de aquellos que lo tengan.

Como $grd(f) = 3$:

$$\mathbb{Z}_2/I = \{g + I \mid grd(g) < 3 \wedge g \in \mathbb{Z}_2[x]\} =$$

$$\{0 + I, 1 + I, x + I, (x + 1) + I, x^2 + I, (x^2 + 1) + I, (x^2 + x) + I, (x^2 + x + 1) + I\}$$

Calculamos el inverso de los elementos que lo tengan:

- $(0 + I)$ no tiene inverso.
- $(1 + I)^{-1} = (1 + I)$.
- $(x + I)^{-1} = (x^2 + I)$:

$$\text{mcd}(x, f) = \text{mcd}(x, x^3 + 1) = 1 \Rightarrow \exists (x + I)^{-1}$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & +1 & x \\ -x^3 & & x^2 \\ \hline & 1 & \end{array}$$

r_i	u_i	v_i
$x^3 + 1$	1	0
x	0	1
1	1	$-x^2$

$$1 = (x^3 + 1) + x(-x^2) = (x^3 + 1) + x(x^2) \text{ en } \mathbb{Z}_2[i]$$

- $(x + 1) + I$ no tiene inverso:

$$\text{mcd}(x + 1, x^3 + 1) = x + 1 \nsim 1 \Rightarrow \nexists [(x + 1) + I]^{-1}$$

- $(x^2 + I)^{-1} = (x + I)$.
- $(x^2 + 1) + I$ no tiene inverso:

$$\text{mcd}(x^2 + 1, x^3 + 1) = x + 1 \nsim 1 \Rightarrow \nexists [(x^2 + 1) + I]^{-1}$$

- $(x^2 + x) + I$ no tiene inverso:

$$\text{mcd}(x^2 + x, x^3 + 1) = x + 1 \nsim 1 \Rightarrow \nexists [(x^2 + x) + I]^{-1}$$

- $(x^2 + x + 1) + I$ no tiene inverso:

$$\text{mcd}(x^2 + x + 1, x^3 + 1) = x^2 + x + 1 \nsim 1 \Rightarrow \nexists [(x^2 + x + 1) + I]^{-1}$$